المحاضرة الثانية عشر - 12 ‏ ‏ ‏ ‏ 21 / 5 / 2018م

التطبيقات المقيسة والدوال المقيسة:

فيما سبق كنا نتعامل مع مجموعة X غير خالية وصف (عائلة) من مجموعة أجزاء X ولنسميه H ، حيث درسنا دوال المجموعات مثل القياس μ على H وتأخذ قيمها بالمجال $]-\infty, +\infty]$

$$\mu : H \longrightarrow]-\infty, +\infty]$$

والقياس الخارجي:

$$\mu^* : 2^X \longrightarrow]-\infty, +\infty]$$

سابقاً تعلمنا كيف عرفنا المجموعة المقيسة وفق μ^* ودرسنا صف المجموعات المقيسة $\mathcal{M}_{\mu^*}$.

* ومن الآن فصاعداً سوف نتعامل مع مجموعتين غير خاليتين X ، X' (قد تكونا مختلفتين وقد تكونا متساويتين)

كما نتعامل مع صفين H ، H' من المجموعات الجزئية في X ، X' على الترتيب.

نحتاج هنا للتطبيق بين عناصر هاتين المجموعتين ونعرفه كما يلي:

- كل علاقة T تربط عناصر المجموعة X بعناصر المجموعة X' تسمى تطبيقاً من X في X' ونكتب

$$T : X \longrightarrow X'$$
$$x \longrightarrow T(x) = x'$$

حيث أنه كل عنصر x من X $(x \in X)$ يقابله عنصر وحيد x' من X' $(x' \in X')$

(لا مانع من أن يرتبط العنصران x_1, x_2 من X بنفس العنصر x' من X')

- نسمي العنصر x' صورة العنصر x وفق التطبيق T

- إذا كان R = X' مجموعة الأعداد الحقيقية فنسمي التطبيق $T: X \to R$ دالة ذات قيم حقيقية.

- أما إذا كانت $X' = \bar{R}$ مجموعة الأعداد الحقيقية الموسعة فنسمي التطبيق $T: X \to \bar{R}$ دالة عددية.

لإمكانية تعريف التطبيق القيوس والدالة القيوسة نحتاج لما يسمى الصورة العكسية من مجموعة وفق تطبيق.

وقبل ذلك علينا بتعريف الصورة المباشرة للمجموعة

ليكن: $T: X \to X'$ تطبيقاً من المجموعة X من X'

• ولتكن $E \subset X$ مجموعة جزئية من X عندئذٍ نكتب

$$T(E) = \{T(x) : x \in E\} \subset X'$$

ونسمي المجموعة $T(E)$ الصورة المباشرة للمجموعة E وفق التطبيق X

• ليكن H صفاً من أجزاء المجموعة X عندئذٍ نكتب

$$T(H) = \{T(E) : E \in H\} \subset X'$$

ونسمي $T(H)$ الصورة المباشرة للصف H وفق التطبيق T

• الآن لتكن E' مجموعة جزئية من X' $E' \subset X'$

عندئذٍ نضع $T^{-1}(E') = \{x \in X , T(x) \in E'\}$

ونسمي $T^{-1}(E')$ الصورة العكسية لـ E' وفق التطبيق T

وإذا كان H' صفاً من أجزاء X' فنكتب

$$T^{-1}(H') = \{T^{-1}(E') : E' \in H'\} \subset X$$

ونسمي $T^{-1}(H')$ الصورة العكسية لـ H' وفق التطبيق T

ملاحظة:

العلاقات التالية محققة دوماً: وهي:

1- الصورة العكسية للمجموعة الخالية = المجموعة الخالية

$$T^{-1}(\emptyset) = \emptyset$$

2-

2- $T^{-1}(E'\cup F') = (T^{-1}(E'))\cup T^{-1}(F')$

3- $T^{-1}(E'\cap F') = T^{-1}(E')\cap T^{-1}(F')$

4- $T^{-1}(E'\setminus F') = T^{-1}(E')\setminus T^{-1}(F')$

5- $T^{-1}(E'^{c}) = (T^{-1}(E'))^{c}$

6- من أجل أي مجموعة أدلة I يكون أيضاً:

$$T^{-1}\Big(\bigcup_{i\in I} E'_i\Big) = \bigcup_{i\in I} T^{-1}(E'_i)$$

$$T^{-1}\Big(\bigcap_{i\in I} E'_i\Big) = \bigcap_{i\in I} T^{-1}(E'_i)$$

ملاحظة:

فيما يلي سنأخذ الصفين H ، H' على أنهما σ-جبر F ، F' على X ، X' على الترتيب.

نحتاج للتعريف التالي:

تعريف: لتكن X مجموعة غير خالية ولتكن F σ-جبر على X ، ولتكن μ قياساً على σ-جبر F $\quad \mu : F \to]-\infty, +\infty]$

(1) نسمي الثنائية (X, F) فضاءً قيوساً

وكل مجموعة F من F نسميها مجموعة قيوسة

(2) نسمي الثلاثية (X, F, μ) فضاءً قيوساً مع قياس μ

أو اختصاراً نسميه فضاء قياس.

(3) نقول إن (X, F, μ) فضاء قياس منتهٍ أو σ-منتهٍ حسب ما يكون القياس μ منتهٍ أو σ-منتهٍ

الآن: تعريف.

التطبيق القيوس: لتكن (X, F) ، (X', F') فضائين قيوسين

وليكن التطبيق $T : (X, F) \to (X', F')$

عندئذٍ نقول إن T تطبيق (F, F') قيوس

أن صغيرة $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}$ كبيرة

/ /

إذا كان $\mathcal{F} \supset T^{-1}(\mathcal{F}')$ بالعكس ...

$$\forall F' \in \mathcal{F}' \Rightarrow T^{-1}(F') \in \mathcal{F}$$

وفي حالة خاصة:

إذا كان $X = R$ مجموعة الأعداد الحقيقية وكان $\mathcal{F} = B_R$

جبر بوريل

فنقول إن T قيوسة $(\mathcal{F}-B_R)$ ـ قيوس

أي أن T قيوسة بوريلي :

ـ انتهت المحاضرة ١٢ ـ